Der Satz von Bayes

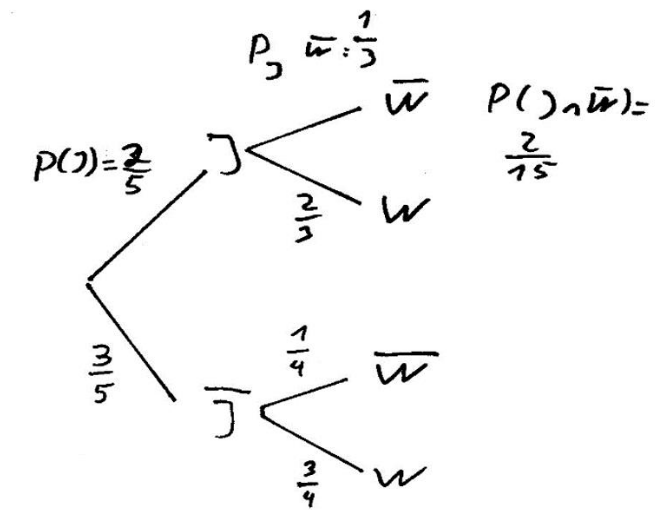
Gegeben ist die Wahrscheinlichkeit für $P_B(A)$. Wie kann man nun umgekehrt ermitteln, was die Wahrscheinlichkeit für $P_A(B)$ ist? Hier wird das sogenannte Umkehrproblem gesucht.

Nehmen wir noch einmal die Aufgabe mit der Weihnachtsmarktbefragung aus dem Arbeitsblatt „Totale Wahrscheinlichkeit“:

Hier wurde ermittelt, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Junge bzw. Mädchen gerne auf den Weihnachtsmarkt geht. Nun kann man auch umgekehrt fragen: Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Schüler des GMO der den Weihnachtsmarkt mag, weiblich?

Erstelle ein inverses Diagramm und beantworte die Frage. Sind die gewonnen Erkenntnisse für den Single Hans von besonderem Interesse?

Ursprüngliches Baumdiagramm:



$P(J \cap \overline{w})$ ist gegeben. Es gilt, dass $P(J \cap \overline{w}) = P(\overline{w} \cap J)$. Daher kann man das Baumdiagramm invertieren.

Inverses Baumdiagramm: Dabei gilt aus der Aufgabenstellung P(W) = 41.66 %

Die Wahrscheinlichkeit kann man auch mit dem Satz von Bayes ermitteln:

Der Satz von Bayes

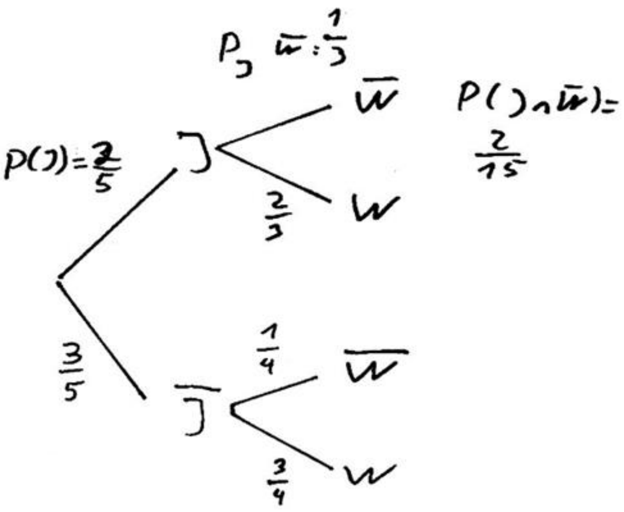
Sind A und B Ereignisse mit P(A) ≠ 0 und P(B) ≠ 0, so gelten folgende Formeln:

Herleitung: Da $A \cap B$ und $B \cap A$ identisch sind, gilt auch P($A \cap B$) = P($B \cap A$) Daraus folgt $P(B)\cdot P_B(A) = P(A)\cdot P_A(B)$. Aufgelöst nach $P_B(A)$ ergibt sich die Gleichung. Die erste Formel unterscheidet sich von der zweiten Formel darin, dass man für P(B) die Formel für die totale Wahrscheinlichkeit eingesetzt hat.

Berechne nun die Wahrscheinlichkeiten für $P_{\overline{W}}(J)$

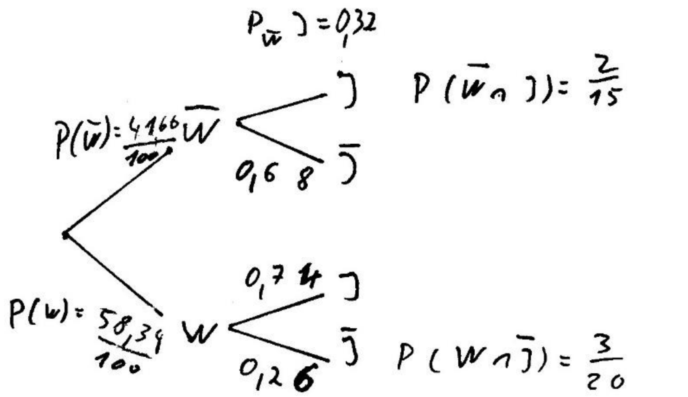
Der Satz von Bayes Lösung
Gegeben ist die Wahrscheinlichkeit für $P_B(A)$. Wie kann man nun umgekehrt ermitteln, was die Wahrscheinlichkeit für $P_A(B)$ ist? Hier wird das sogenannte Umkehrproblem gesucht.
Nehmen wir noch einmal die Aufgabe mit der Weihnachtsmarktbefragung aus dem Arbeitsblatt „Totale Wahrscheinlichkeit“: Etwa 46.66 % von allen Befragten gehen nicht gerne auf den Weihnachtsmarkt. Hier wurde ermittelt, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Junge bzw. Mädchen gerne auf den Weihnachtsmarkt geht. Nun kann man auch umgekehrt fragen: Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Schüler des GMO der den Weihnachtsmarkt mag, weiblich? Erstelle ein inverses Diagramm und beantworte die Frage. Sind die gewonnen Erkenntnisse für den Single Hans von besonderem Interesse?

Ursprüngliches Baumdiagramm:



$P(J \cap \overline{w})$ ist gegeben. Es gilt, dass $P(J \cap \overline{w}) = P(\overline{w} \cap J)$. Daher kann man das Baumdiagramm invertieren.

Inverses Baumdiagramm: Dabei gilt aus der Aufgabenstellung P(W) = 41.66 %



$P_{\overline{w}}J) = P(\overline{w} \cap J) : P(\overline{w}) = \frac{2}{15} : \frac{41,66}{100} = 0,32$

Die Wahrscheinlichkeit kann man auch mit dem Satz von Bayes ermitteln:

Der Satz von Bayes

Sind A und B Ereignisse mit P(A) ≠ 0 und P(B) ≠ 0, so gelten folgende Formeln:

$$P_B(A) = \frac{P(A) \cdot P_A(B)}{P(B)} \qquad P_B(A) = \frac{P(A) \cdot P_A(B)}{P(A) \cdot P_A(B) + P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(B)}$$

Herleitung: Da $A \cap B$ und $B \cap A$ identisch sind, gilt auch P($A \cap B$) = P($B \cap A$) Daraus folgt $P(B) \cdot P_B(A) = P(A) \cdot P_A(B)$. Aufgelöst nach $P_B(A)$ ergibt sich die Gleichung. Die erste Formel unterscheidet sich von der zweiten Formel darin, dass man für P(B) die Formel für die totale Wahrscheinlichkeit eingesetzt hat.

Geben Sie hier eine Formel ein.Berechne nun die Wahrscheinlichkeiten für $P_{\overline{W}}(J)$:

$$P_{\overline{w}}(J) = \frac{P(J) \cdot P_J(\overline{w})}{P(\overline{w})} = \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3}}{41,66\%} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} : \frac{41,66}{100} = \frac{2}{15} \cdot \frac{100}{41,66} = 0,32$$